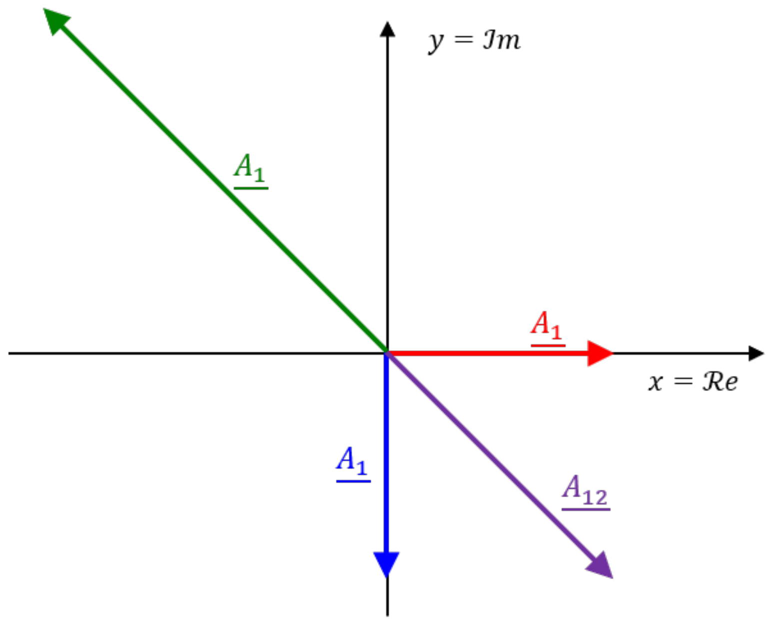
# Signaux | Chapitre 2 | Correction TD (S2)

## Exercice n°1 • Représentation complexe *cours*

1) On a : $s_2(t) = \sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$




2) $s_1$ et $s_2$ sont en quadrature de phase.
3) Voir schéma.
4) Graphiquement,

$$\underline{A_{12}} = \underline{A_1} + \underline{A_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{12} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}}$$

et la phase vaut $-\pi/4$.
Vérifions-le par le calcul. On a :

$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)$$

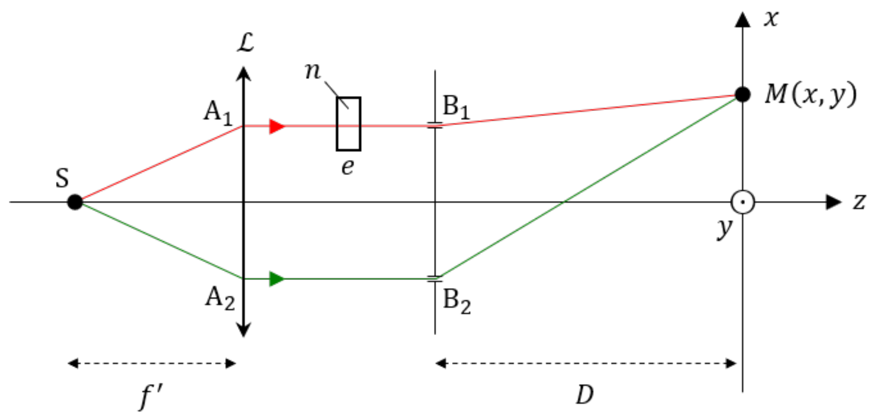
On en déduit :

$$\boxed{s_{12}(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t) = \sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

L'amplitude vaut bien $\sqrt{2}$ et la phase $-\pi/4$.
5) $s_3$ et $s_{12}$ sont en opposition de phase. Il s'agit donc d'interférences destructives.

## Exercice n°2 • Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre *cours*

1) Les rayons partent du point focal objet. Ils ressortent donc parallèle à l'axe optique.




2) La différence de marche vaut :

$$\begin{aligned} \delta &= (SA_2B_2M) - (SA_1B_1M) \\ &= \underbrace{(SA_2) - (SA_1)}_{0} + \underbrace{(A_2B_2) - (A_1B_1)}_{(1-n)e} + \underbrace{(B_2M) - (B_1M)}_{ax/D} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D} - (n-1)\,e}$$

3) L'éclairement sur le mur vaut :

$$E(x) = 2E_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)\right)$$

L'interfrange correspond à la période de cette fonction :

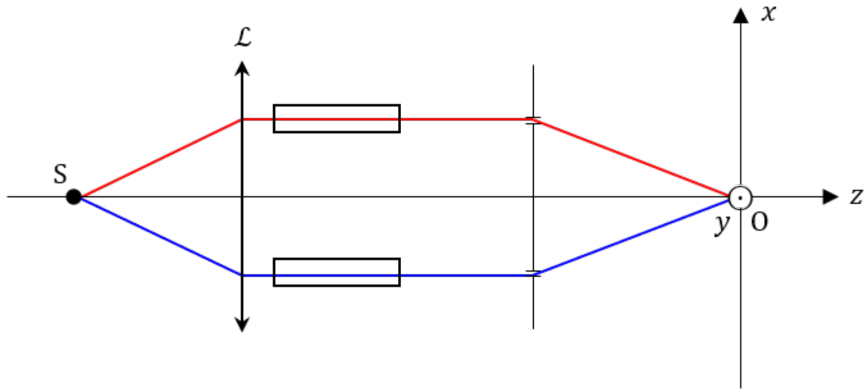
$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

Lorsque l'on enlève la lame, la figure d'interférence se décale de 7 interfranges. Cela signifie que pour retrouver la même différence de marche $\delta$, la position du point $M$ sur l'écran doit varier de $7i$. En particulier, lorsqu'il n'y a as la lame, la différence de marche est nulle au point origine $O$. Lorsqu'on rajoute la lame, la différence de marche est nulle au point $M$ d'abscisse $+7i$ (en effet, sur la branche du haut, le chemin optique dans le verre est plus long que dans l'air, il faut donc un chemin optique plus court après les trous d'Young).
Ainsi :

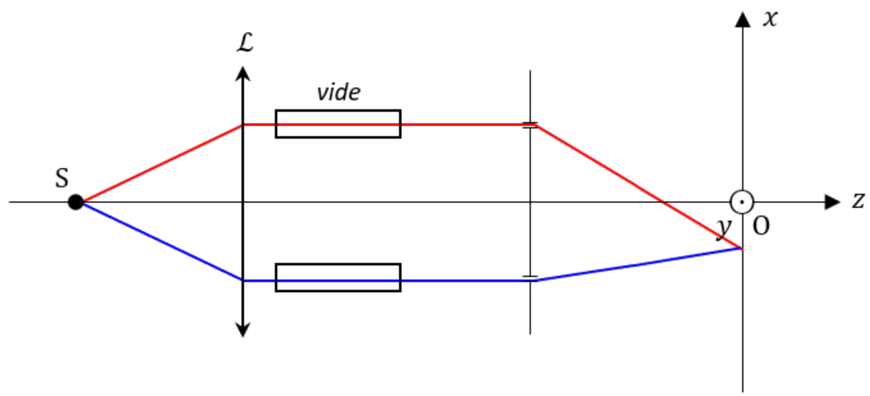
$$\delta(x = 7i) = 0 = 7\lambda - (n-1)\,e \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = \frac{7\lambda}{n-1} = 7\ \mu\text{m}}$$

## Exercice n°3 • Mesure de l'indice optique de l'air ★⯪☆

1) On s'intéresse à la frange brillante correspondant à une différence de marche nulle entre deux rayons. Dans l'état initial, ce sont les deux rayons suivants qui possèdent une différence de marche nulle.




Après avoir fait le vide, le chemin optique du rayon rouge dans le tube $T$ est plus court que celui du rayon bleu dans le tube $T'$. Il faut donc que le rayon rouge parcourt plus de distance après le tube pour arriver sur l'écran avec la même marche que le rayon bleu.




Les franges se déplacent donc vers le bas.
2) Calculons la différence de marche :

$$\delta = (\text{bleu}) - (\text{rouge}) = \underbrace{(n-1)\,L}_{\text{Tubes}} + \underbrace{\frac{nax}{D}}_{\text{Trous d'Young}}$$

avec : n(air) = n

L'éclairement sur le mur vaut :

$$E(x) = 2E_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)$$

L'interfrange correspond à la période de cette fonction :

$$i = \frac{\lambda D}{na}$$

Avant de faire le vide, $\delta(x = 0) = 0$ au niveau du point origine. Après avoir fait le vide, $\delta(x = -101,5 \cdot i) = 0$ à 101,5 interfranges vers le bas (101 franges, puis arrêt sur une frange sombre). Ainsi, après avoir fait le vide :

$$\delta(x = -101,5 \cdot i) = 0 = (n-1)\,L + \frac{na}{D} \cdot \frac{-101,5 \cdot \lambda_0 D}{na}$$

On en déduit :

$$\boxed{n = 1 + 101,5 \cdot \frac{\lambda_0}{L} = 1,000\,29}$$

## Exercice n°4 • Interférences dans une cuve à ondes ★★☆

1) Au voisinage de l'axe $(Oy)$, les interférences sont constructives. On a donc des minima et maxima prononcés : le contraste est élevé.

2) D'après le texte introductif, les deux pointes frappent « en même temps ». Les deux ondes générées possèdent donc la même phase à l'origine, que l'on prendra nulle (choix arbitraire de l'origine des temps). La phase de chaque onde en $M$ vaut donc :

$$\phi_1 = \omega t - kd_1 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\, d_1 \qquad \phi_2 = \omega t - kd_2 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\, d_2$$

La différence de phase vaut :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\,(d_1 - d_2)$$

Pour que l'interférence soit destructive au point $M$, il faut que les ondes soient en opposition de phase. Ainsi :

$$\Delta\phi_{\text{dest.}} = \frac{2\pi}{\lambda}\,(d_1 - d_2) = 2\pi\left(p + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{avec : } \quad p \in \mathbb{Z}$$

Donc :

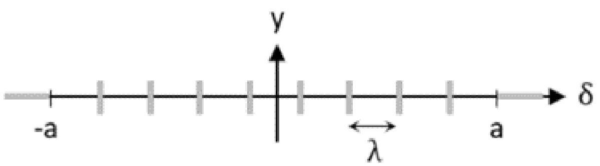
$$\boxed{\delta = d_1 - d_2 = \lambda\left(p + \frac{1}{2}\right)}$$

Il faut donc que la différence de marche $\delta$ soit un multiple demi-entier de la longueur d'onde.

3) Une onde issue de $S_1$ arrive sur $S_2$ en opposition de phase. Cette onde a donc parcouru une distance égale à un multiple demi-entier de la longueur d'onde.

$$\boxed{a = \lambda\left(n + \frac{1}{2}\right)} \qquad \text{avec : } \quad n \in \mathbb{N}$$

4) Entre deux lignes de vibration minimale successives, la différence de marche $\delta$ varie d'une longueur d'onde. Ainsi, on obtient (attention, sur le graphique, l'axe des abscisses est gradué en différence de marche).

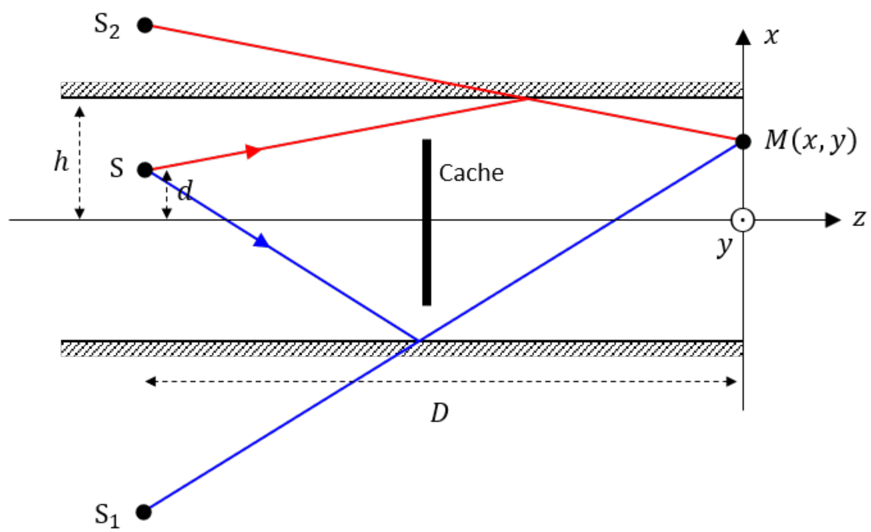



En comptant le nombre de lignes de vibration minimale, on en déduit que :

$$2a = 9\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a}{\lambda} = \frac{9}{2}}$$

## Exercice n°5 • Miroirs parallèles ★★⯪

1) Les sources secondaires $S_1$ et $S_2$ sont les images de $S$ à travers les deux miroirs.




2) La position des différents points :

$$S = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} -2h - d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2h - d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ D \end{pmatrix}$$

La différence de marche vaut : $\delta = (S_1M) - (S_2M)$. Or,

$$\begin{aligned} S_1M &= \sqrt{(x + 2h + d)^2 + y^2 + D^2} \\ &= D\sqrt{1 + \left(\frac{x + 2h + d}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \\ &\simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x + 2h + d}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} S_2M &= \sqrt{(x-2h+d)^2+y^2+D^2} \\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x-2h+d}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2} \\ &\simeq D\left(1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-2h+d}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right) \end{aligned}$$

On en déduit, après simplification,

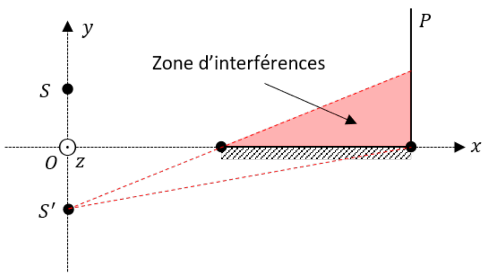
$$\boxed{\delta = \frac{4h}{D}(x+d)}$$

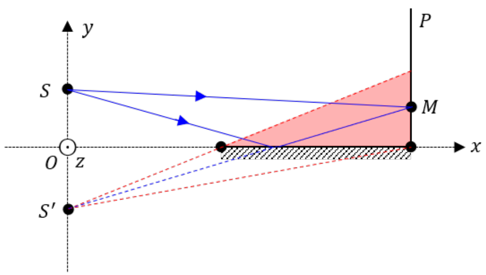
3) L'interférence d'ordre $0$se trouve en $\boxed{x_0=-d}$ et l'interfrange vaut (période de l'éclairement) : $\boxed{i=\dfrac{\lambda D}{4h}}$.

## Exercice n°6 • Miroir de Lloyd ★★☆

1) $S'$ est le symétrique de $S$ par rapport au miroir. Donc : $S' = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Le faisceau directement émis par $S$ éclaire tout l'espace. Le faisceau réfléchit par le miroir correspond à la zone en rouge sur la figure ci-dessous. Il s'agit donc de la zone où l'on trouvera des interférences.




3) Voir schéma ci-dessus.

4) Par définition : $\delta = (S'M) - (SM)$. Or,

$$\begin{aligned} S'M &= \sqrt{(d+\ell)^2+(y+h)^2+z^2} = (d+\ell)\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{y+h}{d+\ell}\right)^2+\left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2}_{\varepsilon}} \\ &= (d+\ell)\left(1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y+h}{d+\ell}\right)^2+\left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2\right]\right) \end{aligned}$$

De même,

$$SM = (d+\ell)\left(1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y-h}{d+\ell}\right)^2+\left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2\right]\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\delta = \frac{2yh}{d+\ell}}$$

Au point $B$, $y=0$, donc $\delta=0$. C'est une interférence constructive (car $\delta$ est un multiple entier de la longueur d'onde).

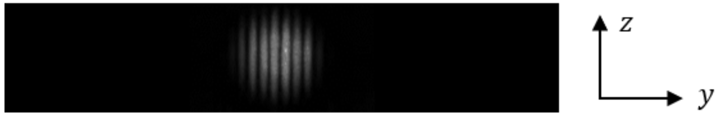
5) Formule de Fresnel :

$$\mathsf{E}(y,z) = 2E_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right) = \boxed{2E_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot\frac{2yh}{d+\ell}\right)\right)}$$

6) Interfrange $=$ période spatiale de $\mathsf{E}(y,z)$. Donc :

$$\boxed{i = \lambda_0\cdot\frac{d+\ell}{2h}}$$

7) Les franges sont parallèles à l'axe des $z$.




8) Je mesure avec une règle graduée au millimètre 7 interfranges pour 1 cm. Ainsi :

$$7i = 10,5\text{ mm} \quad \text{et} \quad \Delta(7i) = 0,5\text{ mm}$$

Ainsi, avec $\Delta(i) = \Delta(7i)/7$ et $u = \Delta/\sqrt{3}$, on obtient :

$$\boxed{i = 1,50 \pm 0,04\text{ mm}}$$

9) Calculons l'écart normalisé :

$$\boxed{E_N = \frac{1,50 - 1,497}{\sqrt{(0,04)^2 + (0,013)^2}} = 0,07 < 2}$$

Les mesures sont compatibles.

10) En prenant en compte le facteur de grandissement :

$$i = \lambda_0 \cdot \frac{d+\ell}{2h} = \frac{i_0}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{5\lambda_0}{i_0} \cdot \frac{d+\ell}{2} = 0,25 \text{ mm}}$$

11) Un décalage d'une demi-interfrange correspond à observer des interférences destructives en $B$. Cela revient donc à ajouter une demi-longueur d'onde à la différence de marche, donc à ajouter $\boxed{\phi = \pi}$ au déphasage.

## Exercice n°7 • Deux hauts-parleurs ★★★

1) Comme les deux sources sont en phases, on choisit l'origine des temps pour que la phase de chacune soit nulle à $t = 0$ au point origine de chaque onde.

Expression de l'onde émise par $H_1$ et $H_2$ :

$$\begin{aligned}
s_1(x > -d/2, t) &= A_0 \cos(\omega t - k\,(x + d/2)) \\
s_1(x < -d/2, t) &= A_0 \cos(\omega t + k\,(x + d/2)) \\
s_2(x > d/2, t) &= A_0 \cos(\omega t - k\,(x - d/2)) \\
s_2(x < d/2, t) &= A_0 \cos(\omega t + k\,(x - d/2))
\end{aligned}$$

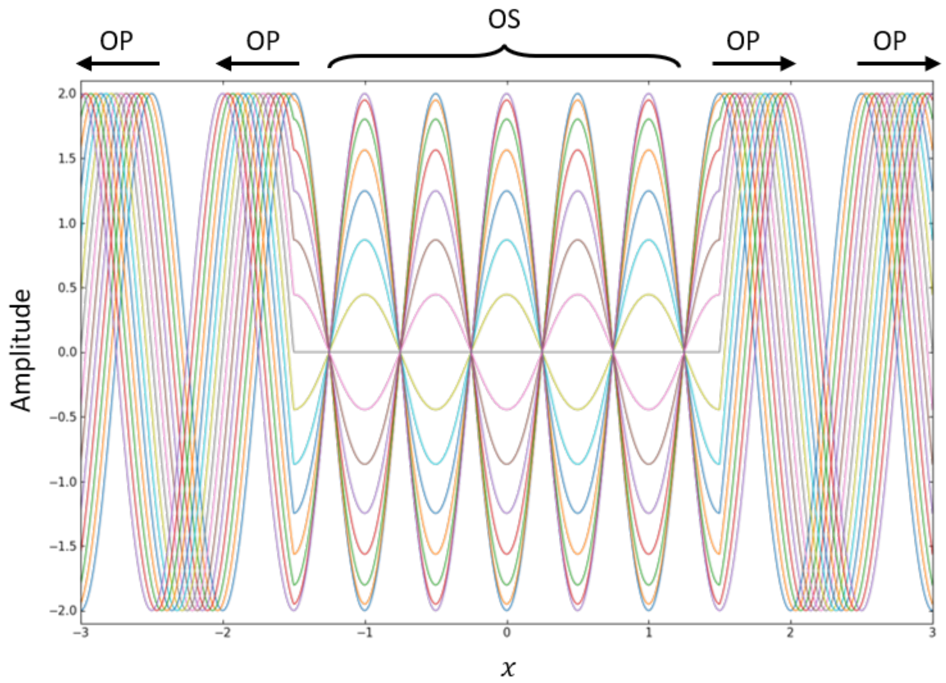
On en déduit l'onde résultante reçue par le microphone (en utilisant le fait que : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

$$\begin{aligned}
s_{tot}(x < -d/2, t) &= \underbrace{2A_0 \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \cos(\omega t + kx) \\
s_{tot}(x > d/2, t) &= \underbrace{2A_0 \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \cos(\omega t - kx) \\
s_{tot}(-d/2 < x < -d/2, t) &= \underbrace{2A_0 \cos\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \cos(kx)}_{\text{Onde stationnaire (cf. MP), pas progressive}}
\end{aligned}$$

2) On rappelle que : $k = 2\pi/\lambda$, donc $kd/2 = p\pi$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
s_{tot}(x < -d/2, t) &= (-1)^p \cdot 2A_0 \cos(\omega t + kx) \\
s_{tot}(x > d/2, t) &= (-1)^p \cdot 2A_0 \cos(\omega t - kx) \\
s_{tot}(-d/2 < x < -d/2, t) &= -2A_0 \cos(\omega t) \cos(kx)
\end{aligned}$$

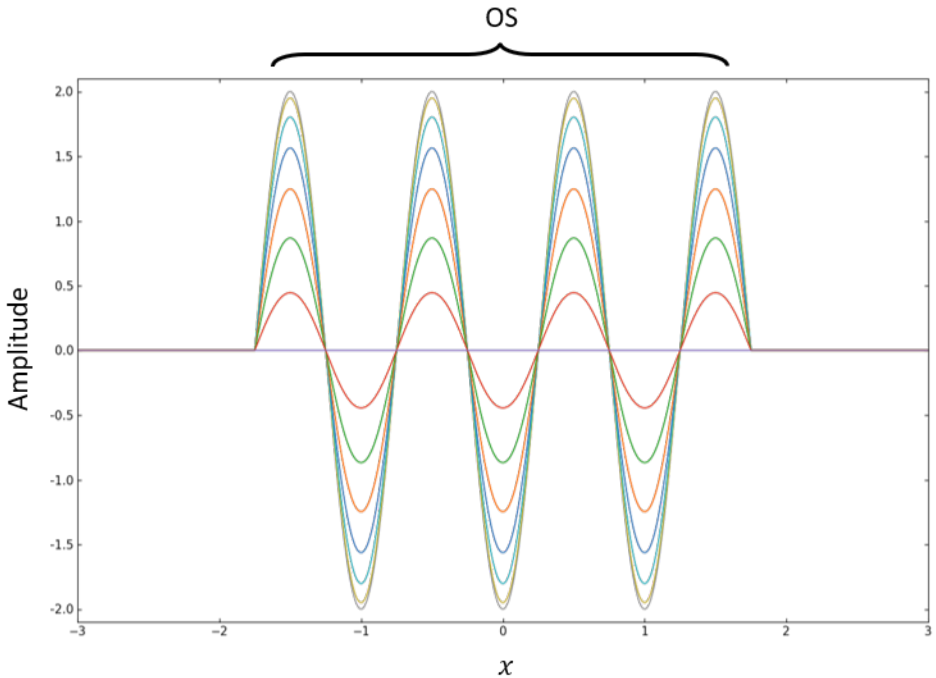
Graphique dans le cas où $d = 3 \cdot \lambda$ (avec $\lambda = 1$ et $c = 1$ en unité arbitraire) avec différentes valeurs de $t$ comprises entre $0$ et $T/2$. On a des interférences constructives pour les OP ($x > d/2$ et $x < -d/2$). Une OS est une successions d'interférences constructives (les ventres, 7 visibles) et destructives (les nœuds, 6 visibles).




3) Cette fois, on a : $kd/2 = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
s_{tot}(x < -d/2, t) &= 0 \\
s_{tot}(x > d/2, t) &= 0 \\
s_{tot}(-d/2 < x < -d/2, t) &= -2A_0 \sin(\omega t) \cos(kx)
\end{aligned}$$

Graphique dans le cas où $d = 3,5 \cdot \lambda$ (avec $\lambda = 1$ et $c = 1$ en unité arbitraire) avec différentes valeurs de $t$ comprises entre $0$ et $T/2$. On a des interférences destructives pour les OP ($x > d/2$ et $x < -d/2$). Une OS est une successions d'interférences constructives (les ventres, 7 visibles) et destructives (les nœuds, 8 visibles).




4) Posons (choix arbitraire de l'origine des temps) la phase égale à $-\phi/2$ pour $H_1$ et la phase égale à $\phi/2$ pour $H_2$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} s_1(x > -d/2, t) &= A_0 \cos(\omega t - k\,(x + d/2) - \phi/2) \\ s_2(x > d/2, t) &= A_0 \cos(\omega t - k\,(x - d/2) + \phi/2) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$s_{tot}(x > d/2, t) = 2A_0 \cos\left(\frac{kd + \phi}{2}\right) \cos(\omega t - kx)$$

On cherche donc $\phi$ tel que :

$$0 = \cos\left(\frac{kd + \phi}{2}\right) = \cos\left(p\pi + \frac{\phi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = \pi}$$

Les deux signaux doivent être en opposition de phase.